دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شـماره از ماه‌نامه، ۱۰ مســئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.
مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول:
مسئله‌ها

۲۶۱. همهٔ اعداد حقیقی x، y و z را بیابید، به‌طوری‌که:

$$x+\sqrt[3]{x}=2y,\ y+\sqrt[3]{y}=2z,\ z+\sqrt[3]{z}=2x$$

۲۶۲. چند زوج از اعـداد طبیعی می‌توان یافت، به‌طوری‌که مجموع آن‌ها برابر ۱۳۹۵ و حاصل‌ضرب آن‌ها مضرب ۱۳۹۵ باشد.

۲۶۳. $2n$ نقطه در صفحه مفروض هسـتند. ثابـت کنید می‌توان با n پاره‌خـط دوبه‌دو نامتقاطـع، این نقاط را به‌هـم وصل کرد، به‌طوری‌که هر نقطه روی دقیقاً یک پاره‌خط باشد.

۲۶۴. مثلـث متسـاوی‌الاضلاع ABC مفروض اسـت. نقطهٔ E روی AB و نقطــهٔ F روی AC مفروض‌انـد؛ به‌طوری‌که EF و BC موازی‌انـد. اگر O مرکز ثقل مثلث AEF و M نقطهٔ میانی EC باشد، مطلوب است اندازهٔ زاویه OBM.

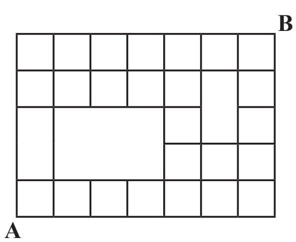
۲۶۵. همهٔ اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰ را بیابید که به‌صورت تفاضل دو مکعب کامل باشند.

۲۶۶. مجموع ۲۰ عدد طبیعی برابر اسـت با ۴۶۲. بزرگ‌ترین عامل مشترک این ۲۰ عدد حداکثر چقدر است؟

۲۶۷. مقدار a را بیابید، به‌طوری‌که معادلهٔ زیر دقیقاً یک ریشـه داشته باشد.

$$|x|+|x-1|+\dots+|x-1396|=a$$

۲۶۸. در شـکل مقـابل چند مسیر از A به B وجود دارد؟ حرکت‌های مجاز پایین به بالا و چپ به راست هستند.



۲۶۹. از یک جدول مربعی به ضلع $n=6k+1$ یک خانه 1×1 را حذف کرده‌ایم. ثابت کنید جدول حاصل را می‌توان با موزاییک‌هایی به شکل فرش کرد.

۲۷۰. از یک جدول 5×5، کدام خانهٔ 1×1 را اگر حذف کنیم، می‌توانیم بقیهٔ خانه‌ها را با موزاییک‌هایی به شکل فرش کنیم؟

بخش دوم:
راه‌حل‌ها

۲۳۱. به ازای چه مقادیری از $n\in\{۱,۲,...,۱۵\}$، $n^n+۱$ اول است؟

$n=۱$ جواب می‌دهد ($n^n+۱=۲$). اگر n عامل اول فردی مانند P داشته باشد، آن‌گاه حاصل مرکب خواهد بود. چرا که حاصل را می‌توان به شکل $a^P+۱$ نوشت و $n^n+۱$ بر $n^{\frac{n}{P}}+۱$ بخش‌پذیر است. پس n تنها می‌تواند توانی از ۲ باشد. با بررسی این اعداد، تنها جواب‌ها ۱، ۲ و ۴ خواهند بود.

۲۳۲. فرض کنید: $f(x)=\frac{۱}{۲}(x-۱)$. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $(f(x))^{۱۱۵}$ بر $f(x^۲)$ برابر $ax+b$ باشد، آن‌گاه $۹a+b$ چقدر است؟

$$f(x)^{۱۱۵}=f(x^۲)Q(x)+ax+b$$

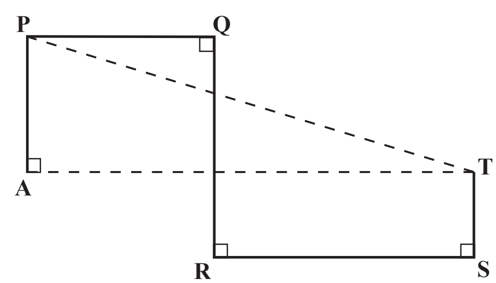
با جای‌گذاری ۱ و ۱- به‌جای x داریم:

$$f(۱)^{۱۱۵}=a+b, f(-۱)^{۱۱۵}=-a+b$$

$$\Rightarrow a+b=۰, -۱=-a+b \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}, b=\frac{-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{باقی‌مانده}=\frac{۱-x}{۲} \text{ و } ۹a+b=\frac{۹}{۲}-\frac{۱}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴$$

۲۳۳. در شکل زیر PQ بر QR، QR بر RS و RS بر ST عمود هستند. همچنین $PQ=۴$، $RS=QR=۸$ و $ST=۳$. طول PT را به‌دست آورید.



به‌راحتی می‌توانید در مثلث قائم‌الزاویهٔ PAT نشان دهید: $PA=۵$ و $AT=۱۲$. در نتیجه:

$$PT=\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}=۱۳$$

۲۳۴. با فرض $\frac{x-y}{x+y}=۹$ و $\frac{xy}{x+y}=-۶۰$ مطلوب است حاصل $(x+y)+(x-y)+xy$

از: $\frac{x-y}{x+y}=۹$ نتیجه می‌شود: $۵y=-۴x$ و از: $\frac{xy}{x+y}=-۶۰$ نتیجه می‌شود: $xy=-۶۰x-۶۰y$. تساوی آخر را در ۵ ضرب می‌کنیم: $۵xy=-۳۰۰x-۳۰۰y$ و بعد به‌جای $۵y$ قرار می‌دهیم $-۴x$ و از آن‌جا داریم:

$$-۴x^۲=-۳۰۰x+۲۴۰x \rightarrow ۴x^۲-۶۰x=۰$$
$$\rightarrow ۴x(x-۱۵)=۰$$

پس: $x=۰$ یا $x=۱۵$. در نتیجه $y=۰$ یا $y=-۱۲$. اما $x=y=۰$ قابل قبول نیست و جواب $(x,y)=(۱۵,-۱۲)$ در معادلات صادق است. مقدار خواسته شده برابر با ۱۵۰- خواهد بود.

۲۳۵. x و y دو عدد حقیقی هستند. کمترین مقدار عبارت زیر را بیابید:

$S=(x+۳)^۲+۲(y-۲)^۲+۴(x-۷)^۲+(y+۴)^۲$

با بسط عبارت برحسب توان‌های x و y و ساده کردن می‌توانید به حاصل زیر برسید:

$S=۵(x-۵)^۲+۳y^۲+۱۰۴$

در نتیجه کمترین مقدار عبارت برابر است با ۱۰۴ (کافی است $x=۵$ و $y=۰$ باشد).

۲۳۶. همهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای را پیدا کنید که طول یکی از اضلاع آن برابر ۶۰ باشد و طول اضلاع آن یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند.

فرض کنید طول سه ضلع a، a-d و a+d باشند. در نتیجه:

$$(a-d)^۲+a^۲=(a+d)^۲$$
$$\Rightarrow a^۲-۲ad+d^۲+a^۲=a^۲+۲ad+d^۲$$

که نتیجه می‌دهد: $a^۲=۴ad$. چون: $a>۰$، در نتیجه: $a=۴d$. با جای‌گذاری نتیجه می‌شود که طول اضلاع $۳d$، $۴d$ و $۵d$ هستند. اکنون سه حالت در نظر می‌گیریم.

۱. اگر: $۳d=۶۰$، آن‌گاه طول اضلاع عبارت است از: ۶۰، ۸۰ و ۱۰۰.

۲. اگر: $۴d=۶۰$، آن‌گاه طول اضلاع ۴۵، ۶۰ و ۷۵ خواهد بود.

۳. اگر: $۵d=۶۰$، طول اضلاع مثلث برابر با ۳۶، ۴۸ و ۶۰ خواهد بود.

۲۳۷. معادلهٔ لگاریتمی زیر را حل کنید:

$$\log_{۴}^{x}-\log_{x}^{۱۶}=\frac{۷}{۶}-\log_{x}^{۸}$$

با فرض $t=\log_{۲}^{x}$، به معادلهٔ $\frac{۱}{t}+\frac{۷}{۶}=\frac{t}{۲}$ می‌رسیم. در نتیجه t باید ۳ یا $-\frac{۲}{۳}$ باشد. بنابراین x برابر است با ۸ یا $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}}$.

۲۳۸. چنـد عدد ده رقمی بـا ارقام ۱ و ۲ می‌توان سـاخت به طوری که چهار رقم متوالی آن ۱۲۲۱ نباشد؟

به‌طــور کلــی $۲^{۱۰}$ عدد ۱۰ رقمی با ارقــام ۱ و ۲ می‌توان ساخت. حال سعی می‌کنیم اعداد نامطلوب را در نظر بگیریم. در یـک عــدد ۱۰ رقمی، برای چهار رقــم ۱۲۲۱، ۷ موقعیت وجــود دارد. در نتیجه $۲^۶×۷=۴۴۸$ عــدد ۱۰ رقمی نامطلوب وجــود دارد. اما در این شــمارش بعضی از اعــداد نامطلوب را چندبار شــمرده‌ایم که باید آن‌هایی را که چندبار شــمرده‌ایم، محاسبه کنیم و در نظر بگیریم. اگر ۱۲۲۱، دوبار در یک عدد ۱۰ رقمی ظاهر شــود و یک رقم مشترک داشته باشند، چهار حالت زیر را خواهیم داشت:

xxx۱۲۲۱۲۲۱ و xx۱۲۲۱۲۲۱x و x۱۲۲۱۲۲۱xx و ۱۲۲۱۲۲۱xxx

که هر کدام با در نظر گرفتن حالت‌های ممکن برای xها، $۲^۳$ عدد تولید می‌کنند. پــس $۸×۴=۳۲$ عدد خواهد بود. از طرف دیگر، عدد ۱۲۲۱۲۲۱۲۲۱ در این ۳۲ عدد، دوبار شمرده شده است. پس ۳۰ عدد نامطلوب وجود دارد که دوبار عبارت ۱۲۲۱ در آن‌ها ظاهر شــده اســت و این دو عبارت ۱۲۲۱، یک رقم مشترک دارند.

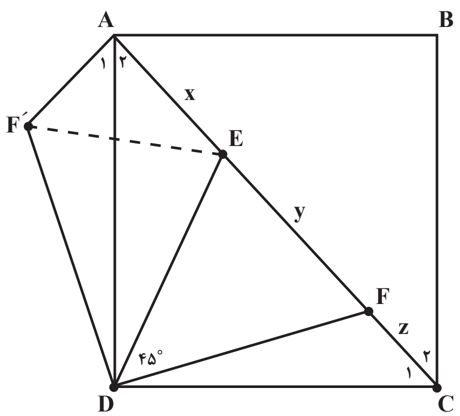
بیشترین مساحت قطاعی که محیط آن مساوی ۴۰ واحد است، در کدام گزینه دیده می‌شود؟

الف) ۸۰
ب) ۱۰۰
ج) ۱۱۰
د) ۱۲۰
هـ) ۱۲۵

حــال اگر اعدادی را بشــماریم که عبــارت ۱۲۲۱، دوبار و بــدون رقــم مشــترک در آن‌ها ظاهر شــده باشــد، به عدد $۶×۲^۲-۱=۲۳$ می‌رســیم (اثبات بــه عهدهٔ خودتان). در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با:

۱۰۲۴-(۴۴۸-۲۳-۳۰-۲)=۶۳۱

۲۳۹. در شکل، ABCD یک مربع است و نقاط E و F روی قطر AC طوری انتخاب شده‌اند که: $\angle EDF=۴۵^\circ$. اگر EF=y، AE=x، و FC=z ثابت کنید: $y^۲=x^۲+z^۲$.



مثلــث ADF' را همنهشــت با مثلــث CDF و در خارج مربع رســم کنید. در نتیجه زاویهٔ $A_۱$ برابر با زاویهٔ $C_۱$ خواهد بــود. بنابرایــن زاویه $F'AE$ قائمه خواهد بــود. از طرف دیگر: $AF'=CF=z$. همچنین: $F'D=DF$ و: $\angle F'DE=\angle ADE+\angle FDC=۴۵^\circ$. پس دو مثلث $F'DE$ و EDF همنهشــتند (بــه حالت دو ضلع و زاویه بیــن) که نتیجه می‌شــود: $F'E=EF=y$. حــال اگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AF'E$ رابطهٔ **فیثاغورس** را بنویسید، حکم نتیجه می‌شود.

۲۴۰. مختصات ســه رأس مثلثی عبارت‌انــد از (۱،۴)، (۵،۳) و (۵،c). مجموع همهٔ مقادیر c را بیابید، به‌طوری که مثلث مذکور مساحتی برابر ۱۴ داشته باشد.

با رسم شکل در صفحهٔ مختصات نتیجه خواهیم گرفت که عمــود وارد بر ضلعی که دو نقطهٔ (۵،۳) و (۵،c) را به‌هم وصل می‌کنــد، طولی برابر ۴ دارد. در نتیجه اگر بخواهیم مســاحت مثلث ۱۴ باشد، باید طول این ضلع یعنی $|c-۳|$ برابر ۷ باشد. در نتیجه: c=۱۰ یا c=-۴. پس پاســخ مسئله برابر ۶=۴-۱۰ خواهد بود.